Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
ore 9:30 — 27 gennaio 2020 - Aula D - Compl. did. Piovego
Durata: 3 ore

Attenzione: Riconsegnerete DUE fogli (protocollo bianco, a 4 facciate), scriverete chiaramente cognome e nome, data e NUMERO (1 e 2) ben in vista, su ciascuno. Non riconsegnate questo foglio nè brutte copie. Potrete uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1

1.1

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -2x^2 + \frac{14}{15}x^3 - \frac{1}{10}x^4 \,.$$

(i) Si traccino il grafico dell'energia potenziale e il ritratto in fase per il sistema dinamico associato.
(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico discutendone la stabilità.
(iii) Si determini, ombreggiando il ritratto in fase e specificando i corrispondenti valori dell'energia totale, l'insieme dei dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

1.2

Dare la definizione di equilibrio stabile e asintoticamente stabile per un sistema dinamico $\dot{x} = X(x)$. Scrivere enunciato e dimostrazione del teorema topologico di Lyapunov per la stabilità degli equilibri di $\dot{x} = X(x)$.

1.3

Descrivere il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per la determinazione delle Reazioni Vincolari per i sistemi olonomi (per esempio, con vincoli dati da zeri di funzioni) e senza attrito (lisci).

2

2.1

Si consideri il sistema costituito da due punti materiali P_1 e P_2 di egual massa $m > 0$, vincolati in modo liscio a scorrere lungo l'asse orizzontale x di un sistema inerziale $Oxyz$. Tra l'origine ed il punto P_1 e tra i punti P_1 e P_2 sono tese due molle lineari di costante elastica $h > 0$ e **lunghezza a riposo** $x_0 = 1$.

1. Determinare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.
2. Scrivere la lagrangiana linearizzata del sistema attorno ad un equilibrio stabile e determinare la frequenza delle piccole oscillazioni del sistema.

2.2

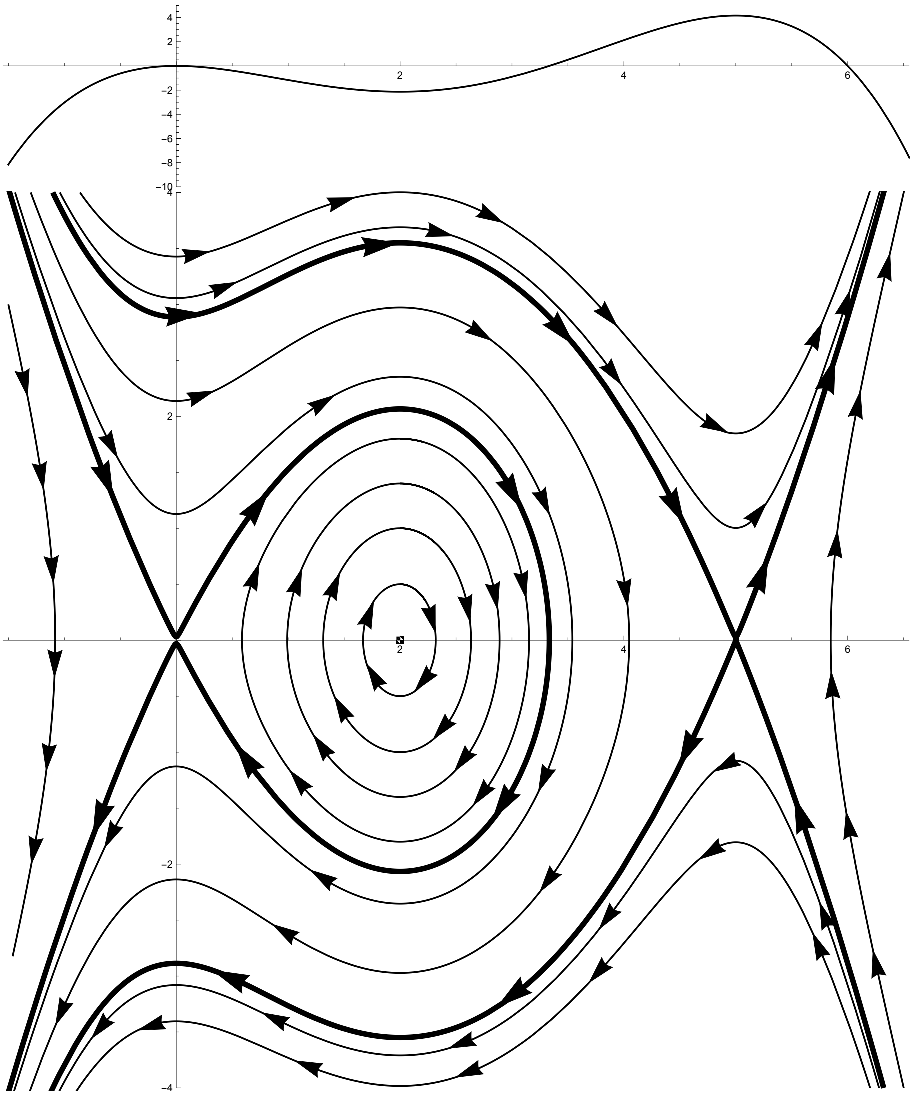
Dimostrare che il flusso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \ni (t, x) \mapsto (t, \Phi^t_{X_H}(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$, $x = (q, p)$, di un sistema Hamiltoniano, per generiche regolari $H = H(x, t)$, è una trasformazione canonica.

2.3

• Dimostrare che un corpo rigido costituito da una sfera omogenea di raggio R e di massa m, in un campo di gravità costante $\mathbf{g}$ (la solita gravità in appross. sup. terrestre), ammette soluzioni in velocità angolare costanti e lungo qualsiasi diametro del c. rigido.
• Sono tutte queste le soluzioni che tale sistema ammette?
• In generale, indipendentemente dal problema di cui sopra, è vero che se per un generico c. rigido la velocità angolare risulta costante rispetto ad una base solidale al c. rigido, allora è pure costante rispetto ad una base esterna, associata ad uno spazio inerziale?

SOLUZIONE ALL'ESERCIZIO 1

1.1 I punti di equilibrio si hanno per $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 5$ con x_1 e x_3 instabili e x_2 stabile. I valori dell'energia totale per cui si hanno orbite periodiche sono compresi tra $V(x_2) = -32/15$ e $V(0) = 0$.



Soluzione all'esercizio 2.1

Siano x_1 e x_2 le ascisse dei due punti. Energia potenziale

$$U = U^{el}(x_1, x_2) = \frac{h}{2}[(x_1 - 1)^2 + (x_2 - x_1 - 1)^2]$$

Gli equilibri si ottengono annullando il gradiente di U,

$$\begin{aligned} U_{x_1} &= h(x_1 - 1) - h(x_2 - x_1 - 1) = 0 && (1) \\ U_{x_2} &= h(x_2 - x_1) = 0 && (2) \end{aligned}$$

L'unico equilibrio è $P^* = (1, 2)$.La matrice Hessiana è

$$H_U = \begin{pmatrix} 2h & -h \\ -h & h \end{pmatrix} \in Sym^+.$$

quindi l'equilibrio trovato è stabile per THND o TLD. L'energia cinetica è una forma quadratica definita positiva

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1, \dot{x}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} (\dot{x}_1, \dot{x}_2).$$

Introducendo le coordinate deviazioni rispetto all'equilibrio $q_1 = x_1 - 1$, $q_2 = x_2 - 2$, la lagrangiana linearizzata è

$$L = \hat{T} - \hat{U} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1, \dot{q}_2) \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} (\dot{q}_1, \dot{q}_2) - \frac{1}{2}(q_1, q_2) \begin{pmatrix} 2h & -h \\ -h & h \end{pmatrix} (q_1, q_2)$$

Le frequenze delle piccole oscillazioni sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(H_U - \omega^2 A) = \det \begin{pmatrix} 2h - \omega^2 m, -h \\ -h, h - \omega^2 m \end{pmatrix} = 0.$$

Rispettivamente

$$\omega_1^2 = \frac{h}{m}\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \qquad \omega_2^2 = \frac{h}{m}\frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

2.2

Dimostrare che il flusso $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N} \ni (t, x) \mapsto (t, \Phi^t_{X_H}(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2N}$, $x = (q, p)$, di un sistema Hamiltoniano, per generiche regolari $H = H(x, t)$, è una trasformazione canonica.

(Si veda la dispensa Cleup a p. 186.)

2.3

• Dimostrare che un corpo rigido costituito da una sfera omogenea di raggio R e di massa m, in un campo di gravità costante $\mathbf{g}$ (la solita gravità in appross. sup. terrestre), ammette soluzioni in velocità angolare costanti e lungo qualsiasi diametro del c. rigido.
• Sono tutte queste le soluzioni che tale sistema ammette?

Le equazioni di Euler diventano (vettorialmente, in $\mathbb{R}^3$): $\dot{\omega} = 0$, dunque tutte e sole le soluzioni rispetto al CR sono del tipo ω =cost.

• In generale, indipendentemente dal problema di cui sopra, è vero che se per un generico c. rigido la velocità angolare risulta costante rispetto ad una base solidale al c. rigido, allora è pure costante rispetto ad una base esterna, associata ad uno spazio inerziale?

La risposta è affermativa, dato che si deve considerare la formula di derivazione di funzioni vettoriali del tempo $u = u(t)$,

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} + \omega \times u.$$

Se prendiamo esattamente $u = \omega$, otteniamo (si veda la dispensa a p. 140):

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}.$$